LÖSUNGEN **AUFGABENGRUPPE A**

1. a) $\mathbb{L} = \{-1; 0; 1\}$
   b) $\mathbb{L} = \{\ldots; -1; 0; 1; 2\}$
   c) $\mathbb{L} = \{2; 3; 4\}$, denn:
   $x - 4 = 0$ oder
   falls $x - 4 > 0$ dann $x + 3 \leq 5$ oder
   falls $x - 4 < 0$ dann $x + 3 \geq 5$
   $x = 4$ oder
   falls $x > 4$ dann $x \leq 2$ oder
   falls $x < 4$ dann $x \geq 2$
   $x = 4$ oder $2 \leq x < 4$
   d) $\mathbb{L} = \{-6; 0; 2\}$, denn:
   $x = 0$ oder $(x - 6)^2 = 4x^2$
   $x = 0$ oder $x - 6 = 2x$ oder $x - 6 = -2x$

2. a) Hinweise zur Konstruktion des Dreiecks ABC:
   Antragen von $\overline{AB}$ und β mit freiem Schenkel $\overline{BC}$
   Parallelen zu $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ im Abstand 2 cm
   (bzw. Winkelhalbierende von β) mit Schnittpunkt M
   Inkreis
   Thaleskreis durch A und M
   schneidet Inkreis in S
   Verlängerung von $\overline{AS}$ und
   freier Schenkel von β schneiden sich in C.
   b) Hinweise zur Konstruktion des Dreiecks ABC:
   Inkreis mit Punkt D
   $\overline{MD}$ senkrecht $\overline{DC}$ und Punkt C
   Thaleskreis durch die Punkte C und M
   schneidet den Inkreis in S.
   Kreis um M mit $r = 4$ cm schneidet
   die Verlängerung von $\overline{CS}$ in B.
   Kreis um B mit $r = |BS|$
   schneidet Inkreis in S'.
   Verlängerung von $\overline{BS'}$ und $\overline{CD}$
   schneiden sich in A.
   c) Hinweise zur Konstruktion des Drachenvierecks $ABCD$:
   Antragen des Inkreises mit Strecke $\overline{MB}$
   $\overline{BM}$ zur Symmetrieachse verlängern,
   Mittelpunktswinkel von 50° an Symmetrieachse antragen,
   freier Schenkel schneidet Inkreis in S ($50° = 90° - 40°$ in ΔDMS).
   Senkrechte in S auf der Verlängerung von $\overline{MS}$
   schneidet die Verlängerung von $\overline{MB}$ in D.
   Thaleskreis durch $\overline{MB}$ schneidet Inkreis in S'.
   Verlängerung von $\overline{DS}$ und $\overline{BS'}$
   schneiden sich in C.
   Spiegeln von C an $\overline{BD}$ ergibt A.

3. a) Konstruktion
   b) (1) Beweis:
   $\sphericalangle CDA = 180° - 2\alpha$, da Dreieck ADC gleichschenklig (symmetrisch
   zu m_{AC} gemäß Konstruktion)

$\sphericalangle BUC = 2\alpha$, da $\overline{BC}$ Sehne des Umkreises (Mittelpunktswinkel)
Das Viereck $DBUC$ ist ein Sehnenviereck, da die gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle CDA$ und $\sphericalangle BUC$ sich zu 180° ergänzen.

(2) Beweis:
$\sphericalangle BUC = \sphericalangle BEC$ (Umfangswinkel über der Sehne $\overline{BC}$)
$\sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle BEC = 180° - 2\alpha$, also $\sphericalangle EBA = \alpha$,
also Dreieck ABE gleichschenklig mit Basis $\overline{AB}$, d. h. E liegt auf m_{AB}

---

4. a) $(0;0)$, $(2;2)$, $\left(\frac{3}{2};3\right)$, $\left(\frac{4}{3};4\right)$ (allgemein: $\left(\frac{a}{a-1};a\right)$ oder $\left(b;\frac{b}{b-1}\right)$)

b) Beweis:
$\frac{1}{x} = \frac{a+b}{ab}$
$x = \frac{ab}{a+b}$
Sei a das Minimum von a und b (mit b als dem Minimum ist die Argumentation entsprechend). Zu zeigen: $x = \frac{ab}{a+b} < a$
$ab < a^2 + ab$
$0 < a^2$

c) Beweis:
zu zeigen: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < 1$
$a(b+c) < b(a+c) < b(b+c)$
$ab + ac < ab + bc < b^2 + bc$
somit $ac < bc$ und damit $a < b$ korrekt da $0 < a/b < 1$
bzw. $ab < b^2$ und damit ebenfalls $a < b$ korrekt da $0 < a/b < 1$

---

5. a) Die Mitgliederzahl ist um 10 % gefallen, denn:
$1000 \cdot 0,93 \cdot x + 73 = 1000 \cdot 0,91$
$930x + 73 = 910$
$x = 837 : 930$
$x = 0,9$

b) Es wechselten 40 Personen vom Hockeyclub zum Turnverein, denn:
x: Anzahl der Mitglieder des Hockeyclubs
$0,2 \cdot x \cdot 2 + 1,5 \cdot x = 380$
$1,9 \cdot x = 380$
$x = 200$
$200 : 5$

c) Es wurden $\frac{40}{41}$ aller Plätze verkauft, denn:
x: Anzahl der verkauften Plätze (beim 1. Spiel)
y: Anzahl der freien Plätze (beim 1. Spiel)
$x + y = 0,75x + 11y$
$0,25x = 10y$
$x = 40y$
$x + y = 41y$

---

6. a) 57,5 g Lakritz, 54,5 g Kokos und 8 g Vanillecreme, denn:
$10 \cdot (l \cdot 5 + v \cdot 0,2 \cdot 4 + c \cdot 0,8 \cdot 4 + l \cdot 0,25 \cdot 3 + c \cdot 0,75 \cdot 3)$
$10 \cdot (5l + 0,8v + 3,2c + 0,75l + 2,25c)$
$10 \cdot (5,75l + 0,8v + 5,45c)$

b) Es ist nicht möglich, da man den Anteil der Vanillecreme nicht über 20 % steigern kann.

c) (1) 2 mögliche Lösungen:

Lakritzstäbchen	8	10	12	14
Kokoskugeln	5	10	15	20
Kokosröllchen	16	12	8	4

(... oder Vielfache davon)

$s \cdot 5l + k \cdot (0,8v + 3,2c) + r \cdot (0,75l + 2,25c)$
$s \cdot 5l + k \cdot 0,8v + k \cdot 3,2c + r \cdot 0,75l + r \cdot 2,25c$
$l \cdot (5s + 0,75r) + k \cdot 0,8v + c \cdot (3,2k + 2,25r)$

$5s + 0,75r = 3,2k + 2,25r$
$5s - 3,2k - 1,5r = 0$

(2) 3 Lakritzstäbchen und 10 Kokosröllchen
(alternativ: 3 · 5 g + 10 · 0,25 · 3 g Lakritz und 10 · 0,75 · 3 g,
d. h. 22,5 g Lakritz und 22,5 g Kokos)
$s \cdot 5 + r \cdot 0,25 \cdot 3 = r \cdot 0,75 \cdot 3$
$s = 0,3r$

---

7. a) a) $\text{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(= \frac{7}{12}\right)$

b) (1) Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal hintereinander Wappen und 6 fallen, beträgt $\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^3$. $\text{p} = 1 - \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^3$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht dreimal hintereinander zugleich Wappen und 6 fallen.

(2) $\text{p} = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right) \left(= \frac{1}{1728} + \frac{33}{1728} = \frac{34}{1728} = \frac{17}{864}\right)$

c) z. B. $\text{p}_{\text{Wappen}} = 0,4$ und $\text{p}_{\text{Sechs}} = 0,2$, denn:
$\text{p}_{\text{Wappen}} + \text{p}_{\text{Sechs}} - \text{p}_{\text{Wappen}} \cdot \text{p}_{\text{Sechs}} = 0,52$
$\text{p}_{\text{Sechs}} = \frac{0,52 - \text{p}_{\text{Wappen}}}{1 - \text{p}_{\text{Wappen}}}$

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2009/2010 DES LANDES HESSEN 3. RUNDE

LÖSUNGEN AUFGABENGRUPPE B

---

1. a) $\mathbb{L} = \{1\}$ oder $x = 1$, denn:
$48x - 30 = 12x - 2 + 8x$
$28x = 28$

b) $\mathbb{L} = \{0; 1; 2; \ldots\}$, denn:
$x^2 + 10x + 25 - (x^2 - 8x + 16) > 0$
$x^2 + 10x + 25 - x^2 + 8x - 16 > 0$
$18x + 9 > 0$
$x > -0,5$

c) $x = 9$, denn:
$1,\overline{3} = \frac{4}{3}$

d) $\mathbb{L} = \{0; 25\}$

e) $\mathbb{L} = \{-4; 0; 4\}$

---

2. a) (1) S_1: 17,6 l
richtiger Ansatz, z. B. 80 % von 22 l
20 % von 22 l = 4,4 l
S_2: 39,6 l
B_1: 18 l
richtiger Ansatz, z.B. 14,4 l sind 80 %
B_2: 32,4 l
J_1: 10 l
richtiger Ansatz, z.B. 18 l sind 180 %
J_2: 8 l

(2) Nach 2 Tagen muss der Tank geleert werden, denn:
Tagesleistung (Schwarzbunt): 200 · 39,6 l = 7920 l
Tagesleistung (Braunvieh): 50 · 32,4 l = 1620 l
Tagesleistung (Jersey): 25 · 18 l = 450 l
Gesamttagesleistung: 9990 l
25 000 l : 9990 l (oder entsprechender Ansatz)
(≈ 2,5, aber die Kühe geben morgens mehr Milch als abends)

b) 280 000 l, denn:

20 % werden zu Trinkmilch verarbeitet
56 000 l sind 20 %

---

3. a) 7_8
b) 1_2; 12_3; 11_4; 10_5; 9_6; 8_ 7
c) $\alpha = 105°$ $(= 180° - (90° - 15°))$
$\beta = 45°$ (12_6 halbiert den rechten Winkel und ist parallel zu 11_7.)
d) z. B. 12_6; 4_ 10; 5_9
e) Thalessatz (oder andere plausible Begründung)

---

4. a) (1) Hinweise zur Konstruktion:
Seite a und Winkel β
Anzeichnen von b und Parallele zu a
(2) Hinweise zur Konstruktion:
Seite a (oder b) und Parallele im Abstand h
Kreisbogen mit $r = b$ (oder a)
(3) Hinweise zur Konstruktion:
$\frac{e}{2}$ und Winkel ε
Dreieck ABM
b) Hinweise zur Konstruktion:
$g \cdot h = 20$
g (z. B. 4 cm) und Antragen von α oder g und
Parallele im Abstand h (dann 5 cm)

---

5. a) Diagramm
Koordinatensystem mit Beschriftung
Graph für B
Graph für A
b) (1) A: 4,50 €
B: 4,00 €
(2) A: 9,00 €
B: 10,00 €
c) 2h 16 min bis 3 h
5h 16 min bis 6 h
8h 16 min bis 9 h
11h 16 min bis 12 h
d) z. B. pro angefangene 80 Minuten beträgt die Parkgebühr 2,50 €.

---

6. a) (1) $\frac{1}{3}$
(2) $\frac{2}{3}$
b) (1) $\gamma = 36°$, denn:
$\frac{1}{10}$ von 360 oder 360 : 10
(2) $\frac{189}{360} \left(= \frac{21}{40}\right)$
$1 - (\frac{72}{360} + \frac{99}{360}) \left(= 1 - \left(\frac{8}{40} + \frac{11}{40}\right)\right)$
(3) $\beta = 18°$, denn:
$\frac{3}{4}$ entsprechen 270°
$\beta = 360° - (270° + 72°)$
c) (1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \left(= \frac{1}{36}\right)$
(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(= \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{216} = \frac{27+8+1}{216} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}\right)$

---

7. a) (1) z. B. $81 > 80$
$9^2 > 8 \cdot 10$

(2) z. B. $25 > 24$
$(-5)^2 > (-4) \cdot (-6)$

(3) $(-1)^2 > (-2) \cdot 0$, d. h. $1 > 0$
$0^2 > (-1) \cdot 1$, d. h. $0 > -1$
$1^2 > 0 \cdot 2$, d. h. $1 > 0$

(4) $1 > 0$, denn:
$(z+1)^2 > z \cdot (z+2)$
$z^2 + 2z + 1 > z^2 + 2z$

b) 4
Begründung: $(z+2)^2 - z(z+4) = z^2 + 4z + 4 - z^2 - 4z$

c) 5
Begründung: $(z+5)^2 - z(z+10) = z^2 + 10z + 25 - z^2 - 10z = 25$

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2009/2010 DES LANDES HESSEN **3. RUNDE**

LÖSUNGEN **AUFGABENGRUPPE C**

1. a) (1) $x = -11$, denn:
$5x + 7 = 3x - 15$
$2x = -22$

(2) $x = 2$, denn:
$0,5x = 1$

(3) $x = 6,75$, denn:
$8x - 6,8 = 8x - 2x + 6,7$
$2x = 13,5$

b) Lukas ist 15 Runden gelaufen.
z. B. Lösung durch Rechnung:
$x + x + 4 + x - 6 = 31$
$3x - 2 = 31$
$x = 11$

---

2. a) 10 % (entsprechen 1,5 cm^2), denn:
Fläche graues Rechteck: $A = a \cdot b = 1,5$ cm $\cdot$ 1 cm = 1,5 cm^2
Fläche großes Rechteck: $A = 5$ cm $\cdot$ 3 cm = 15 cm^2
100 % entsprechen 15 cm^2
1 % entsprechen 0,15 cm^2

b) (1) 100 % entsprechen 18 cm^2, denn:
Fläche Dreieck: $A = (a \cdot h) : 2 = 4,5$ cm $\cdot$ 1,2 cm : 2
= 2,7 cm^2
15 % entsprechen 2,7 cm^2
1 % entsprechen 0,18 cm^2

(2) Beispiel für Grundseite: $c = 12$ cm
damit für Höhe: $h = 3$ cm

c) Vergrößerung um 100 %, denn:
Fläche Parallelogramm $A = 5,2$ cm $\cdot$ 2 cm = 10,4 cm^2
$A_{neu} = 5,2$ cm $\cdot$ 4 cm = 20,8 cm^2

---

3. a) 12 Raten (zu je 80 €), denn:
$8 \cdot 120$ € = 960 €
960 € : 80 €

b) (1) Zeichnung

(2) ca. 7,3 cm (genauer 7,343...)
29 Zoll, denn:

			73 cm 73 : 2,54 $\approx$ 28,74 Zoll
		(3)	Sie hat Recht (mit Begründung, z. B. das Ausgangsrechteck passt viermal in das mit der doppelten Diagonalen).
	c)	(1)	375,2 kWh, denn: $335 \cdot 4 = 1340$ $1340 \cdot 0{,}28$
		(2)	71,29 €, denn: $375{,}2 \cdot 0{,}19$ € $= 71{,}288$ €
4.	a)		84 cm, denn: $4 \cdot 12$ cm $= 48$ cm $8 \cdot 4{,}5$ cm $= 36$ cm
	b)		12,5 cm, denn: 136 cm $- 4 \cdot 9$ cm $= 100$ cm 100 cm : 8
	c)	(1)	$V = x \cdot y \cdot y$
		(2)	y = 7 cm, denn: 539 cm^3 : 11 cm = 49 cm^2
	d)	(1)	$O = 2 \cdot y \cdot y + 4 \cdot x \cdot y$
		(2)	O= 1400 cm^2, denn: $2 \cdot 14$ cm $\cdot 14$ cm $= 392$ cm^2 $4 \cdot 14$ cm $\cdot 18$ cm $= 1008$ cm^2
5.	a)		26 % entsprechen 15 080 Jugendlichen, denn: 26 % ablesen 100 % entsprechen 58 000 Jugendlichen. 1 % entsprechen 580 Jugendlichen.
	b)		7 %, denn: 58 000 − 54 000 = 4000 100 % entsprechen 58 000 Jugendlichen. 1 % entsprechen 580 Jugendlichen. 4000 : 580 $\approx$ 6,9 %
	c)		38 400 Ausbildungsverträge entsprechen 100 %, denn: 39 936 Ausbildungsverträge entsprechen 104 %. 384 Ausbildungsverträge entsprechen 1 %.
	d)	(1)	100,8° entsprechen „Abitur“, denn: 1 % entspricht 3,6°.
		(2)	ohne Hauptschulabschluss: 5 % entsprechen 18°.
6.	a)	(1)	Zeichnung $a = 6$ cm
		(2)	Zeichnung mit korrekten Maßen (z. B. 4 cm breit, 9 cm lang) Flächeninhalt 36 cm^2
	b)		Hinweise zur Konstruktion des Quadrates: Zeichnen der Diagonalen d Senkrechte auf M_d mit der Länge $\frac{d}{2}$ Verdopplung von $\frac{d}{2}$
	c)		Hinweise zur Konstruktion des Trapezes:

		Zeichnen der Seite a und Halbieren
		Zeichnen von h im Mittelpunkt M_a
		Senkrechte zu h mit der Länge $\frac{c}{2}$
		Verdopplung von $\frac{c}{2}$
	d)	Hinweise zur Konstruktion der Figur:
		Konstruktion des inneren Dreiecks (SSS)
		Konstruktion eines äußeren Dreiecks (SSS)
7.	a) (1)	p(Freikarte) $= \frac{5}{100} \left(= \frac{1}{20}\right)$
	(2)	p(Gewinn) $= \frac{40}{100} \left(= \frac{2}{5}\right)$
	(3)	p(Niete) $= \frac{60}{100} \left(= \frac{3}{5}\right)$
	b) (1)	p(Mädchen)$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \left(= \frac{3}{10}\right)$
	(2)	p(gesamt) $= \frac{6}{10} \left(= \frac{3}{5}\right)$